

MENGENLEHRE

RELATION

Eine Teilmenge von R des Kartesischen Produktes $A \times B$ heißt *Relation* (zwischen A und B ; zweistellige Relation).

INJEKTIVE ABBILDUNG

Haben verschiedene Urbilder auch verschiedene Bilder so heißen Sie injektive Abbildung.

BIJEKTIVE ABBILDUNG

Die Elemente von D werden auch *Urbilder* genannt und die Elemente von B Bilder, welche durch f zugeordnet werden. Bei bijektiven Abbildungen existiert immer eine Umkehrfunktion f^{-1} .

SURJEKTIVE ABBILDUNG

Eine Abbildung die sowohl injektiv wie auch bijektiv ist nennt man *Surjektive Abbildung*. Zu allen Bildern existiert mindestens ein Bild.

Es gibt auch Abbildungen, die weder injektiv noch surjektiv sind.

ELEMENTARE FUNKTIONEN

GERADE FUNKTION

Sei f eine Funktion mit dem Definitionsbereich $D = \mathbb{R}$ und dem Wertebereich W , dann bezeichnet man eine Funktion, für die gilt $f(x) = f(-x)$ als gerade Funktion. Die Spiegelung erfolgt an der Ordinaten (Y-Achse). Man spricht von Achsensymmetrie.

UNGERADE FUNKTION

Gilt jedoch $f(x) = -f(-x)$ dann spricht man von einer ungeraden Funktion. Die Spiegelung erfolgt am Nullpunkt. Man spricht von Punktsymmetrie.

MONOTONIE

Sei f eine im D definierte Funktion, dann heißt f monoton steigend, wenn für alle $x_1, x_2 \in D$ mit $x_1 < x_2$ gilt $f(x_1) \leq f(x_2)$ oder heißt monoton fallend, wenn $f(x_1) \geq f(x_2)$ gilt.

Die Funktion heißt streng monoton steigend, wenn für alle $x_1, x_2 \in D$ mit $x_1 < x_2$ gilt $f(x_1) < f(x_2)$ oder streng monoton fallend, wenn $f(x_1) > f(x_2)$ gilt.

FUNKTIONSVERSCHIEBUNG

Sei $f(x)$ gegeben. Nun soll die Funktion $f(x)$ um den positiven Betrag Δx verschoben werden. \rightarrow Verschiebung in Richtung der positiven Abszisse (also nach rechts auf der x -Achse) $\rightarrow f(x-\Delta x)$ bzw. $f(t-t_0)$.

Nun soll $f(x)$ um den negativen Betrag Δx verschoben werden \rightarrow Verschiebung in Richtung der negativen Abszissenrichtung (also nach links). $\rightarrow f(x+\Delta x)$ bzw. $f(t+t_0)$.

Verschiebung in Ordinatenrichtung: $y = f(x)+b$

PERIODISCHE FUNKTION

Eine Funktion $f(x)$ heißt periodisch, wenn gilt $f(x) = f(x+p) \rightarrow p = \text{Periodenlänge}$

LINEARE FUNKTIONEN

EIGENSCHAFTEN einer LINEAREN FUNKTION

- 1.) Die Steigung des Graphen der Funktion ist in allen Punkten gleich,
- 2.) Das Bild der Funktion ist eine Gerade,
- 3.) Eine Gerade ist eindeutig bestimmt durch zwei nicht zusammenfallenden Punkte P und Q, d.h. die lineare Funktion ist eindeutig bestimmt durch zwei Punkte $P(x_p, y_p)$ und $Q(x_q, y_q)$ mit $P \neq Q$ und $x_p \neq x_q$.

$y = a_1x + a_0 \rightarrow$ Eine Gerade ist eindeutig festgelegt durch die Vorgabe von

- a) zweier Punkte $P_1(x_1, y_1)$ und $P_2(x_2, y_2)$ mit $P_1 \neq P_2$.
- b) durch einen Punkt $P_1(x_1, y_1)$ und die Steigung der Geraden im Punkt P_1 .

STAUCHUNG

$$f(ax) \quad |a| > 1$$

DEHNUNG

$$f(ax) \quad |a| < 1$$

STEIGUNG DER GERADEN

$$a_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

QUADRATISCHE FUNKTIONEN (quadratische Polynome)

Graph einer quadratischen Funktion: **PARABEL** \rightarrow Eine Parabel ist eindeutig festgelegt durch die Vorgabe dreier Punkte P_1, P_2, P_3 , die nicht auf einer Geraden liegen und deren P_i paarweise verschieden sind.

Berechnung mit dem Newton-Ansatz in Form eines quadratischen Polynoms (Differenzenschema) $\rightarrow y(x) = C_0 + C_1(x - x_1) + C_2(x - x_1)(x - x_2)$

KEGELSCHNITTE

Kreis mit Mittelpunkt M (0,0) und dem Radius r: $x^2 + y^2 = r^2$

Einheitskreis: M (0,0) und $r=1 \rightarrow x^2 + y^2 = 1$

KREISTANGENTE

$$Y = y_T + m_{\text{Tangente}}(X - x_T)$$

ELLIPSE

Ellipse mit Mittelpunkt M (0,0) und den Halbachsen a, b: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$
(Wenn $a=b$, dann: KREIS)

HYPERBEL

Hyperbel mit Mittelpunkt M (0,0): $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ Asymptoten: $Y_a = \pm \frac{b}{a} x$

KREISFUNKTION

Für die positive (obere) Hälfte des Kreises: $y = y_M + \sqrt{r^2 - (x - x_M)^2}$ oder
Für die negative (untere) Hälfte des Kreises: $y = y_M - \sqrt{r^2 - (x - x_M)^2}$

TRIGONOMETRISCHE FUNKTIONEN

SINUSFUNKTION

$y = f(x) = \sin x$ ist eine 2π -periodische Funktion $\rightarrow f(x) = -f(-x) \rightarrow$ ungerade Fkt
 $f(x) = \sin x$ Definitionsbereich: $D = \mathbb{R}$ Nullstellen: $x_{Nk} = k\pi, k \in \mathbb{Z}$
Wertebereich: $W = [-1,1]$ Extremwerte: $x_{Ek} = \pi/2 + k\pi, k \in \mathbb{Z}$

COSINUSFUNKTION

$y = f(x) = \cos x$ ist eine 2π -periodische Funktion $\rightarrow f(x) = f(-x) \rightarrow$ gerade Fkt
 $f(x) = \cos x$ Definitionsbereich: $D = \mathbb{R}$ Nullstellen: $x_{Nk} = k\pi/2 + k\pi, k \in \mathbb{Z}$
Wertebereich: $W = [-1,1]$ Extremwerte: $x_{Ek} = k\pi, k \in \mathbb{Z}$

TANGENSFUNKTION

$f(x) = \tan x$ ist eine π -periodische Funktion.

$$f(x) = \tan x = \frac{\sin x}{\cos x} \quad \cos x \neq 0$$

Definitionsbereich: $D = \langle -\pi/2, \pi/2 \rangle$ Wertebereich: $W = \mathbb{R}$

COTANGENSFUNKTION

$f(x) = \cot x$ ist eine π -periodische Funktion und im Intervall $\langle 0, \pi \rangle$ streng monoton.

$$f(x) = \cot x = \frac{\cos x}{\sin x} = \frac{1}{\tan x} \quad \sin x \neq 0$$

Definitionsbereich: $D = \langle 0, \pi \rangle$ Wertebereich: $W = \mathbb{R}$

ARCUSSINUSFUNKTION

Die Umkehrfunktion von $\sin x$ wird $\arcsin x$ genannt.

$y = f(x) = \arcsin x$ Definitionsbereich: $D_f^{-1} = [-1,1]$ Wertebereich: $W_f^{-1} = [\pi/2, 3/2\pi]$

ARCUSCOSINUSFUNKTION

Die Umkehrfunktion von $\cos x$ wird $\arccos x$ genannt.

$y = f(x) = \arccos x$ Definitionsbereich: $D_f^{-1} = [-1,1]$ Wertebereich: $W_f^{-1} = [0, \pi]$

ARCUSTANGENSFUNKTION

Die Umkehrfunktion von $\tan x$ wird $\arctan x$ genannt.

$y = f(x) = \arctan x$ Definitionsbereich: $D_f^{-1} = \mathbb{R}$ Wertebereich: $W_f^{-1} = \langle -\pi/2, \pi/2 \rangle$

ADDITIONSTHEOREME

$$\sin(x \pm y) = \sin x \cdot \cos y \pm \cos x \cdot \sin y$$

$$\sin 2x = \sin x \cdot \cos x + \cos x \cdot \sin x = 2\sin x \cos x$$

$$\cos(x \pm y) = \cos x \cdot \cos y \pm \sin x \cdot \sin y$$

$$\cos 2x = \cos x \cdot \cos x - \sin x \cdot \sin x = \cos^2 x - \sin^2 x$$

$$\cos^2 x + \sin^2 x = 1$$