MENGENLEHRE

RELATION
Eine Teilmenge von R des Kartesischen Produktes A x B heißt *Relation* (zwischen A und B; zweistellige Relation).

INJEKTIVE ABBILDUNG
Haben verschiedene Urbilder auch verschiedene Bilder so heißen Sie injektive Abbildung.

BIJEKTIVE ABBILDUNG
Die Elemente von D werden auch *Urbilder* genannt und die Elemente von B Bilder, welche durch f zugeordnet werden. Bei bijektiven Abbildungen existiert immer eine Umkehrfunktion f^{-1}.

SURJEKTIVE ABBILDUNG
Eine Abbildung die sowohl injektiv wie auch bijektiv ist nennt man *Surjektive Abbildung.* Zu allen Bildern existiert mindestens ein Bild.

Es gibt auch Abbildungen, die weder injektiv noch surjektiv sind.

ELEMENTARE FUNKTIONEN

GERADE FUNKTION
Sei f eine Funktion mit dem Definitionsbereich D = IR und dem Wertebereich W, dann bezeichnet man eine Funktion, für die gilt f(x) = f(-x) als gerade Funktion. Die Spiegelung erfolgt an der Ordinaten (Y-Achse). Man spricht von Achsensymmetrie.

UNGERADE FUNKTION
Gilt jedoch f(x) = -f(-x) dann spricht man von einer ungeraden Funktion. Die Spiegelung erfolgt am Nullpunkt. Man spricht von Punktsymmetrie.

MONOTONIE
Sei f eine im D definierte Funktion, dann heißt f monoton steigend, wenn für alle x_1, x_2 Є D mit $x_1 < x_2$ gilt $f(x_1) \leq f(x_2)$ oder heißt monoton fallend, wenn $f(x_1) \geq f(x_2)$ gilt.
Die Funktion heißt streng monoton steigend, wenn für alle x_1, x_2 Є D mit $x_1 < x_2$ gilt $f(x_1) < f(x_2)$ oder streng monoton fallend, wenn $f(x_1) > f(x_2)$ gilt.

FUNKTIONSVERSCHIEBUNG
Sei f(x) gegeben. Nun soll die Funktion f(x) um den positiven Betrag Δx verschoben werden. → Verschiebung in Richtung der positiven Abzisse (also nach rechts auf der x-Achse) → $f(x-\Delta x)$ bzw. $f(t-t_0)$.
Nun soll f(x) um den negativen Betrag Δx verschoben werden → Verschiebung in Richtung der negativen Abzissenrichtung (also nach links). → $f(x+\Delta x)$ bzw. $f(t+t_0)$.
Verschiebung in Ordinatenrichtung: y = f(x)+b

PERIODISCHE FUNKTION
Eine Funktion f(x) heißt periodisch, wenn gilt f(x) = f(x+p) → p = Periodenlänge

LINEARE FUNKTIONEN

EIGENSCHAFTEN einer LINEAREN FUNKTION

1.) Die Steigung des Graphen der Funktion ist in allen Punkten gleich,
2.) Das Bild der Funktion ist eine Gerade,
3.) Eine Gerade ist eindeutig bestimmt durch zwei nicht zusammenfallenden Punkte P und Q, d.h. die lineare Funktion ist eindeutig bestimmt durch zwei Punkte $P(x_p, y_p)$ und $Q(x_Q, y_Q)$ mit $P \neq Q$ und $x_p \neq x_Q$.

$y = a_1x + a_0$ → Eine Gerade ist eindeutig festgelegt durch die Vorgabe von
a) zweier Punkte $P_1(x_1, y_1)$ und $P_2(x_2, y_2)$ mit $P_1 \neq P_2$.
b) durch einen Punkt $P_1(x_1, y_1)$ und die Steigung der Geraden im Punkt P_1.

STAUCHUNG

$f(ax) \quad |a| > 1$

DEHNUNG

$f(ax) \quad |a| < 1$

STEIGUNG DER GERADEN

$$a_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

QUADRATISCHE FUNKTIONEN (quadratische Polynome)

Graph einer quadratischen Funktion: **PARABEL** → Eine Parabel ist eindeutig festgelegt durch die Vorgabe dreier Punkte P_1, P_2, P_3, die nicht auf einer Geraden liegen und deren P_i paarweise verschieden sind.
Berechnung mit dem Newton-Ansatz in Form eines quadratischen Polynoms (Differenzenschema) → $y_{(x)} = C_0 + C_1(x - x_1) + C_2(x - x_1)(x - x_2)$

KEGELSCHNITTE

Kreis mit Mittelpunkt M (0,0) und dem Radius r: $x^2 + y^2 = r^2$
Einheitskreis: M (0,0) und r=1 → $x^2 + y^2 = 1$

KREISTANGENTE

$Y = y_T + m_{Tangente}(x - x_T)$

ELLIPSE

Ellipse mit Mittelpunkt M (0,0) und den Halbachsen a, b: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$
(Wenn a=b, dann: KREIS)

HYPERBEL

Hyperbel mit Mittelpunkt M (0,0): $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ Asymptoten: $Y_a = \pm \frac{b}{a} x$

KREISFUNKTION

Für die positive (obere) Hälfte des Kreises: $y = y_M + \sqrt{r^2 - (x - x_M)^2}$ oder
Für die negative (untere) Hälfte des Kreises: $y = y_M - \sqrt{r^2 - (x - x_M)^2}$

TRIGONOMETRISCHE FUNKTIONEN

SINUSFUNKTION

$y = f(x) = \sin x$ ist eine 2π-periodische Funktion → $f(x) = -f(-x)$ → ungerade Fkt

$f(x) = \sin x$ Definitionsbereich: $D = IR$ Nullstellen: $x_{Nk} = k\,\pi$, $k \in Z$

Wertebereich: $W = [-1,1]$ Extremwerte: $x_{Ek} = \pi/2 + k\,\pi$, $k \in Z$

COSINUSFUNKTION

$y = f(x) = \cos x$ ist eine 2π-periodische Funktion → $f(x) = f(-x)$ → gerade Fkt

$f(x) = \cos x$ Definitionsbereich: $D = IR$ Nullstellen: $x_{Nk} = k\,\pi/2 + k\,\pi$, $k \in Z$

Wertebereich: $W = [-1,1]$ Extremwerte: $x_{Ek} = k\,\pi$, $k \in Z$

TANGENSFUNKTION

$f(x) = \tan x$ ist eine π-periodische Funktion.

$f(x) = \tan x = \dfrac{\sin x}{\cos x}$ $\cos x \neq 0$

Definitionsbereich: $D = \langle -\pi/2 , \pi/2 \rangle$ Wertebereich: $W = IR$

COTANGENSFUNKTION

$f(x) = \cot x$ ist eine π-periodische Funktion und im Intervall $\langle 0,\pi \rangle$ streng monoton.

$f(x) = \cot x = \dfrac{\cos x}{\sin x} = \dfrac{1}{\tan x}$ $\sin x \neq 0$

Definitionsbereich: $D = \langle 0 , \pi \rangle$ Wertebereich: $W = IR$

ARCUSSINUSFUNKTION

Die Umkehrfunktion von sin x wird arc sin x genannt.

$y = f(x)$ arc sin x Definitionsbereich: $D_f^{-1} = [-1,1]$ Wertebereich: $W_f^{-1} = [\pi/2, 3/2\,\pi]$

ARCUSCOSINUSFUNKTION

Die Umkehrfunktion von cos x wird arc cos x genannt.

$y = f(x)$ arc cos x Definitionsbereich: $D_f^{-1} = [-1,1]$ Wertebereich: $W_f^{-1} = [0, \pi]$

ARCUSTANGENSFUNKTION

Die Umkehrfunktion von tan x wird arc tan x genannt.

$y = f(x)$ arc tan x Definitionsbereich: $D_f^{-1} = IR$ Wertebereich: $W_f^{-1} = \langle -\pi/2, \pi/2 \rangle$

ADDITIONSTHEOREME

$\sin (x \pm y) = \sin x * \cos y \pm \cos x * \sin y$

$\sin 2x = \sin x * \cos x + \cos x * \sin x = 2\sin x \cos x$

$\cos (x \pm y) = \cos x * \cos y \pm \sin x * \sin y$

$\cos 2x = \cos x * \cos x - \sin x * \sin x = \cos^2 x - \sin^2 x$

$\cos^2 x + \sin^2 x = 1$