Einige Regeln zum Differenzieren

1. Summenregel: Die Ableitung einer Summe ist die Summe der Ableitungen: $y(x) = u(x) + v(x) \Rightarrow y'(x) = u'(x) + v'(x)$. Voraussetzung ist dabei, daß u und v im betrachteten Punkt/Intervall differenzierbar sind.

2. Produktregel: Die Ableitung eines Produktes zweier Funktionen $y(x) = u(x) \cdot v(x)$ ist gegeben durch $y(x) = u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x)$. Erweiterung: Für $y(x) = u_1(x) \cdot u_2(x) \cdot \ldots \cdot u_n(x)$ ergibt sich $y'(x) = u_1'(x) \cdot u_2(x) \cdot \ldots \cdot u_n(x) + u_1(x) \cdot u_2'(x) \cdot \ldots \cdot u_n(x) + \ldots + u_1(x) \cdot u_2(x) \cdot \ldots \cdot u_n'(x)$. Sonderfall: Für $y(x) = u(x) \cdot v(x)$ mit konstantem u ergibt sich $y'(x) = u \cdot v'(x)$. Voraussetzung ist dabei, daß u und v im betrachteten Punkt/Intervall differenzierbar sind.

3. Quotientenregel: Die Ableitung des Quotienten zweier Funktionen $y(x) = u(x)/v(x)$ ist gegeben durch

$$y'(x) = \frac{v(x) \cdot u'(x) - u(x) \cdot v'(x)}{v^2(x)} .$$

Voraussetzung ist dabei, daß u und v im betrachteten Punkt/Intervall differenzierbar sind und v nicht Null wird. Sonderfall: Für $y(x) = u(x)/v(x)$ mit konstantem u ergibt sich

$$y'(x) = \frac{-u(x) \cdot v'(x)}{v^2(x)}.$$

4. Kettenregel: Es seien zwei Funktionen $u = g(x)$ und $y = f(u)$ gegeben, so daß y eine implizite Funktion von x ist: $y = f(g(x))$. Dann ist die Ableitung von y nach x an der Stelle x_0 gegeben durch

$$\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)_{x_0} = \left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}u}\right)_{u_0} \cdot \left(\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}\right)_{x_0} .$$

Voraussetzung ist dabei, daß f in u_0 und g in x_0 differenzierbar sind.

5. Differenzieren einer Umkehrfunktion: Die Funktion $y = f(x)$ sei im Intervall $[a,b]$ differenzierbar und $f'(x) > 0$ (bzw. $f'(x) < 0$) im ganzen Intervall. Dann ist die Umkehrfunktion $x = g(y)$ bzw. $x = f^{-1}(y)$ in diesem Intervall differenzierbar, und es gilt

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{1}{\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}} = \left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)^{-1} .$$

Im Folgenden werden die Ableitungen einiger gebräuchlicher Funktionen gegeben. Diese Ableitungen lassen sich für die ersten zwei Fälle aus der Definition der Ableitung herleiten. Die Ableitungen der transzendenten Funktionen können erst später hergeleitet werden. Die folgenden Regeln können teilweise mit Hilfe der eben beschreibenen Zusammenhänge auseinander hergeleitet werden (z. B. $\operatorname{tg} x = \sin x \,/\, \cos x$ usw.).

(1)	$f(x) = \text{const.}$	$\Rightarrow$	$f'(x) = 0$
(2)	$f(x) = x^n$ (n beliebig reell)	$\Rightarrow$	$f'(x) = n \cdot x^{n-1}$
(3)	$f(x) = e^x$	$\Rightarrow$	$f'(x) = e^x$
(4)	$f(x) = a^x$	$\Rightarrow$	$f'(x) = a^x \cdot \ln a$
(5)	$f(x) = \ln x$	$\Rightarrow$	$f'(x) = 1/x$
(6)	$f(x) = {}^a\log x$	$\Rightarrow$	$f'(x) = \frac{1}{x} \cdot {}^a\log e$
(7)	$f(x) = \sin x$	$\Rightarrow$	$f'(x) = \cos x$
(8)	$f(x) = \cos x$	$\Rightarrow$	$f'(x) = -\sin x$
(9)	$f(x) = \operatorname{tg} x$	$\Rightarrow$	$f'(x) = \frac{1}{\cos^2 x}$
(10)	$f(x) = \operatorname{ctg} x$	$\Rightarrow$	$f'(x) = -\frac{1}{\sin^2 x}$
(11)	$f(x) = \operatorname{arc\,tg} x$	$\Rightarrow$	$f'(x) = \frac{1}{1+x^2}$

<u>Beispiele</u>:

$f(x) = x^2 + 2x + 5$	$\Rightarrow$	$f'(x) = 2x + 2$	(Summenregel)
$f(x) = (x^2 + 4)\cdot(x^3 - 3)$	$\Rightarrow$	$f'(x) = 2x \cdot (x^3 - 3) + 3(x^2 + 4) \cdot x^2$	(Produktenregel)
$f(x) = \frac{x^2 + 2x + 2}{x + 3}$	$\Rightarrow$	$f'(x) = \frac{2x+2}{x+3} - \frac{x^2+2x+2}{(x+3)^2}$	(Quotientenregel)
$f(x) = (x^2 + 5)^4$	$\Rightarrow$	$f'(x) = 8\,(x^2 + 5)^3 \cdot x$	(Kettenregel)
$f(x) = e^{-x^2}$	$\Rightarrow$	$f'(x) = -2\,x \cdot e^{-x^2}$	(Kettenregel)